Théorème de Carlson | Leçons : 229, 246, 253

Lemme 1 : Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, on définit $g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$ | Leçons 229 et 253

- Si g existe et est positif pour tout x alors f est convexe.
- Si g est nulle alors f est affine.

Preuve :

- $\forall \alpha > 0$, on définit $f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + \alpha x^2 \end{cases}$ on a

$$\forall h > 0, \quad \frac{f_\alpha(x+h) + f_\alpha(x-h) - 2f_\alpha(x)}{h^2} = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} + 2\alpha$$

Or on a $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \geq 0$

D'où $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists h \in]0, \varepsilon[, \quad \frac{f_\alpha(x+h) + f_\alpha(x-h) - 2f_\alpha(x)}{h^2} \geq \alpha > 0$

D'où $f_\alpha(x) \leq \frac{1}{2}\left[f_\alpha(x+h) + f_\alpha(x-h)\right]$

Donc f_α est convexe car en posant $\varphi : \begin{cases} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f_\alpha(x) + \mu x \end{cases}$ il s'agit de montrer que φ atteint son maximum sur $[a,b]$ en a ou en b. φ est continue sur un compact donc atteint ses bornes notons $M = \sup_{[a,b]} \varphi$, Soit $\Gamma = \varphi^{-1}(\{M\})$ et $c = \inf \Gamma$, φ est continue donc Γ est fermé donc $c \in \Gamma$ donc $\varphi(c) = M$.

Si $a < c < b$ alors $\exists h > 0$ $a < c-h < c < c+h < b$ et $\varphi(c) \leq \frac{1}{2}[\varphi(c-h) + \varphi(c+h)]$ or $\varphi(c) = M = \sup_{[a,b]} \varphi$ on a donc $\varphi(c-h) = \varphi(c+h) = \varphi(c) = M$ ce qui contredit la définition de c. Donc $c = a$ ou $c = b$ d'où le résultat et f_α est convexe.

Et donc comme $f_\alpha \xrightarrow[\alpha \to 0]{} f$, f est limite simple de fonctions convexes donc f est convexe.

- f vérifie les hypothèses du point précédent donc est convexe, ceci est aussi valable pour $-f$ donc f est concave. Donc f est affine

$\square$

Lemme 2 : Soit $\sum a_n$ une série à termes complexes, convergente de somme nulle.

Leçon 246

On pose $U_0 : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 1 \end{cases}$ et $U_n : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \left(\frac{\sin(nt)}{nt}\right)^2 \end{cases}$

On a $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n U_n(t)$ existe $\forall t \neq 0$ et $\lim_{t \to 0} S(t) = 0$

Preuve :

- $\sum a_n$ converge $\Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $|a_n U_n(t)| \leq \frac{|a_n|}{n^2 t^2}$ donc $S(t)$ existe pour $t \neq 0$
- On pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ par transformation d'Abel on a

$$\sum_{n=0}^{N} a_n U_n(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n \left(U_n(t) - U_{n+1}(t)\right) + s_N U_N(t) \quad \text{or } s_N U_N(t) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

D'où $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n \left(U_n(t) - U_{n+1}(t)\right)$

Or on a $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où pour $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall n > N$, $|s_n| < \varepsilon$ et $A = \sup_{n \in \mathbb{N}} |s_n|$

D'où $|S(t)| \leq A \sum_{n=0}^{N-1} |U_n(t) - U_{n+1}(t)| + \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} |U_n(t) - U_{n+1}(t)|$

Or on a $|U_n(t) - U_{n+1}(t)| = \left| \int_{nt}^{(n+1)t} f(x)\,dx \right| \leq \int_{nt}^{(n+1)t} |f(x)|\,dx$ où $f(x) = \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right]$

Or par un calcul on montre que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$ donc $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx$ existe en notant M sa valeur on a donc

$$|S(t)| \leq A \sum_{n=0}^{N-1} |U_n(t) - U_{n+1}(t)| + \varepsilon M \quad \text{et} \quad \lim_{t \to 0} U_n(t) = 1$$

D'où $\lim_{t\to 0} A \sum_{n=0}^{N-1} |U_n(t) - U_{n+1}(t)| = 0$

Donc on a $|S(t)| < \varepsilon'$ d'où $S(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

□

Thm de Cantor : Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = 0$ | Lesas 229, 246, 253

Alors $c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Preuve :

$\boxed{\text{Etape 1 :}}$ On suppose d'abord que $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et on pose

$$F : x \mapsto c_0 \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx}$$

- On a $\left| \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx} \right| \leq \frac{|c_n|}{n^2} \leq \frac{M}{n^2}$ car $c_n \to 0$ donc on a convergence normale donc uniforme donc F existe et est continue sur $\mathbb{R}$.
- En vertu du lemme 1 on cherche à déterminer $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}$

Or par calcul direct on trouve $\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \left(\frac{\sin(\frac{nh}{2})}{\frac{nh}{2}}\right)^2$

Donc en appliquant le lemme 2 avec $a_n = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$ ~~on a bien~~ et $t = \frac{h}{2}$

on a bien que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} = 0$ donc F est affine

D'où $F(x) = \alpha x + \beta = c_0 \frac{x^2}{2} + \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx}$ donc $x \mapsto \alpha x + \beta - c_0 \frac{x^2}{2}$ est 2π-périodique

Donc $\alpha = c_0 = 0$ et $\beta = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx}$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Donc cette série est égale à sa série de Fourier (*) et comme c'est une constante on en déduit $\frac{c_n}{(in)^2} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*$

$\boxed{\text{Etape 2}}$ On ne suppose plus que $c_n \to 0$, on évalue la série $\sum c_n e^{inx}$ en $x+u$ et $x-u$ et on somme les résultats on a donc $0 = \sum (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) e^{inu}$ en fixant u on voit cette série somme comme une série trigonométrique en u de coefficients $d_n = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$ qui converge vers 0 car $\sum c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$ converge. On est donc bien ramené au cas de l'étape 1 $\Rightarrow d_n = 0$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = 0 \Rightarrow c_n = 0 \; \forall n \in \mathbb{Z}$

□

Analyse, Gourdon

COMPLÉMENT

– (*) On a $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}^{+\infty} \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx} - \beta$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$.

On a donc $c_p(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\, e^{-ipx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{c_n}{(in)^2} e^{i(n-p)x}\, dx = \frac{1}{2\pi} \sum \frac{c_n}{(in)^2} \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)x}\, dx$

$= \delta_{n,p} \frac{c_p}{(ip)^2} \cancel{\delta_{n,p}}$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \beta\, e^{-ipx}\, dx = \beta\, \delta_{0,p} = 0$ pour $p \neq 0$

D'où $\frac{c_p}{(ip)^2} = 0 \quad \forall p \neq 0 \Rightarrow c_p = 0$